



TITLE:

次数付きNoether環の有限生成性について (Buchsbaum環と generalized Cohen-Macaulay環の研究)

AUTHOR(S):

後藤, 四郎; 山岸, 規久道

CITATION:

後藤, 四郎 ...[et al]. 次数付きNoether環の有限生成性について (Buchsbaum環と generalized Cohen-Macaulay環の研究). 数理解析研究所講究録 1982, 465: 61-66

ISSUE DATE:

1982-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103175>

RIGHT:

次数付き Noether 環の有限生成性について

日大文理 後藤 四郎

東京理科大 山岸規久道

1. 序. 次数付き可換環 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ が Noether 環である
 $\Leftrightarrow A_0$ が Noether 環でかつ イデアル $A_+ = \bigoplus_{n > 0} A_n$ が有限生成, さらにこのとき A は A_0 -代数として有限生成である
 ———— ということはよくご存じのことと思いますが, 本稿の目的はこゝの結果を (下で定義する) H -次数付き環へ拡張しようというものです。

以下, 考える環はすべて可換環とする。まず, 次数付き環の定義を振り返ろう。

定義. H は Abel 群 (演算は $+$) とする。環 A が H -次数付き環であるとは, A の加法に関する部分群の族 $\{A_h\}_{h \in H}$ で ① $A = \bigoplus_{h \in H} A_h$, ② $A_f A_g \subseteq A_{f+g}$ ($f, g \in H$) をみたすものが存在することである。

この定義の下に我々の結果を述べると

定理. H は有限生成 Abel 群, A は H -次数付き環とせよ. すると次の3つの条件は同値である.

- (1) A は Noether 環である.
- (2) A_0 は Noether 環であり, かつ A は A_0 -代数として有限生成である.
- (3) A のすべての斉次イデアルが有限生成.

この定理から導かれる結果として

系. \mathcal{S} は有限生成 Abel 群 H の部分群で $0 \in \mathcal{S}$ とせよ. このとき, $k[\mathcal{S}]$ が Noether 環 $\Leftrightarrow k$ が Noether 環で \mathcal{S} が有限生成.

$H = \mathbb{Z}$ の時, 定理の (1) と (3) の同値はすでに Matijević [M] によって示されている.

2. 定理の証明.

補題 1. $R \subset \mathcal{S}$ は環の拡大でさらに $R \subsetneq \mathcal{S}$ とせよ. I は R のイデアルとする. このとき, イデアル $I\mathcal{S}$ は \mathcal{S} 上有限生成 $\Leftrightarrow I$ は R 上有限生成.

補題. 2. $B = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} B_s$ は \mathbb{Z} -次数付き環 $\subset C$, $B_+ = \bigoplus_{s \geq 0} B_s$,

$B_- = \bigoplus_{s < 0} B_s$ とおく。

(1) 0 次の元で生成された斉次イデアルがすべて有限生成な
 B_0 は Noether 環である。

(2) $B_+ B$, $B_- B$, $B_s B$ ($s \in \mathbb{Z}$) がすべて有限生成イデアルな
 B は B_0 -代数として有限生成である。

(証明) (1) は補題 1. (2) を示す。 $B_+ B$ は有限生成だから,
 $B_+ B = (f_1, \dots, f_s) B$ ($\deg f_i > 0$, $1 \leq i \leq s$),
 同様に $B_- B = (g_1, \dots, g_t) B$ ($\deg g_j < 0$, $1 \leq j \leq t$)
 と表わせる。 $d = \max \{ \deg f_i \mid 1 \leq i \leq s \}$,
 $d' = \min \{ \deg g_j \mid 1 \leq j \leq t \}$ とおき, さらに
 $C = B_0 [B_s \mid d' \leq s \leq d]$

とおく。すると,

Claim. $C \supset B_+$.

$C \supset B_-$ も同様に示せるから, $C = B$ を得る。一方 $B_s B$ が有限生成より, B_s は B_0 -加群として有限生成 (参補題 1.), よって C は有限生成 B_0 -代数である。

定理の証明.

(3) \Rightarrow (2) のみを示す。 H の torsion 群を T とおけば,
 $H = \mathbb{Z}^m \oplus T$ ($\exists m > 0$). 2つの場合に分けよう。

① $T = (0)$ の場合。 $H = \mathbb{Z}^m$ なのだから, m に関する帰納法を用

いる。 $n=1$ のときは補題2の(2)。 $n \geq 2$ とせよ。

$h \in \mathbb{Z}^m$ に対し, $|h| = \sum_{i=1}^m h_i$ とおく。今 $s \in \mathbb{Z}$ に対し

$$B_s = \bigoplus_{h \in \mathbb{Z}^m, |h|=s} A_h$$

とおけば, 族 $\{B_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ は環 A に \mathbb{Z} -次数付けを与える。

この \mathbb{Z} -次数付け環を B で表わせば, B のイデアル $B+B, B-B, B_s B$ ($s \in \mathbb{Z}$) は, A のイデアルとしても斉次であるから, どれも有限生成。補題2の(2)より, B は B_0 -代数として有限生成である。

次に, $L = \{h \in \mathbb{Z}^m \mid |h|=0\}$ とし, $\alpha: \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow L$ は $\alpha((g_1, g_2, \dots, g_{m-1})) = (g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, -\sum_{i=1}^{m-1} g_i)$ と定めよ。群同型である。 $C_g = A_{\alpha(g)}$ ($g \in \mathbb{Z}^{m-1}$) とおけば, 族 $\{C_g\}_{g \in \mathbb{Z}^{m-1}}$ は環 $C = B_0$ に \mathbb{Z}^{m-1} -次数付けを与える。

$C \subset A$ であり, C の斉次元は A においても斉次元であるから, 補題1より環 C は定理の条件(3)を満たしている。 m に関する帰納法から, C は有限生成 C_0 -代数。先の結果と合わせて, A が有限生成 A_0 -代数であることを知る。

① 一般の場合。射影 $p: H = \mathbb{Z}^m \oplus T \rightarrow T$ を考え,

$$D_t = \bigoplus_{h \in H, p(h)=t} A_h \quad (t \in T)$$

とおく。族 $\{D_t\}_{t \in T}$ は環 A に T -次数付けを与える。この T -次数付け環を D とする。 D の斉次元は A の斉次元でもあるから, $D_t D$ ($t \in T$) は有限生成。故に, D_t は有限

生成 D_0 -加群であるので, D 自身有限生成 D_0 -加群 (④ T は有限群). 一方 D_0 は \mathbb{Z}^m -次数付き環であることは明らかで, ①より D_0 は A_0 -代数として有限生成. このことから, A は有限生成 A_0 -代数であり, よって定理の証明を得る.

3. 例. この節で述べる例は, 遠藤氏が後藤氏にあてた手紙の中で教えてくれたもので, 多くの定理は Abel 群 H が有限生成でないとき一般に正しくないことを示している.

k は体, $p > 0$ は素数とし, さらに $H = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ とおく. このとき次の ① ~ ④ をみたす H -次数付き環 $A = \bigoplus_{h \in H} A_h$ が存在する. ① A は体で $A_0 = k(x)$, ここで x は k 上の不定元. ② A は A_0 上代数拡大.

③ $[A : A_0] = \infty$. ④ $A_h \neq (0)$ ($h \in H$).

(証明) x は k 上の不定元とし, 関数体 $k(x)$ の代数的閉包を E とせよ. E の元の無限列

$$x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$$

を, $x_i^p = x_{i-1}$ ($1 \leq i$) とおきようにとる. この

とき,
$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} k(x_i),$$

$$A_h = k(x) x_2^a \quad \left(h = \frac{a}{p^2} \bmod \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \right)$$

と定める. 族 $\{A_h\}_{h \in H}$ は環 A に H -次数付けをよこ

このようにして得られた H -次数付き環 A が今まさに求まるものである。

後記. この上の結果を論文 [G-Y] にまとめる予定です。

References

[M] J. R. Matijevic, Some topics in graded rings, Thesis, University of Chicago, 1973.

[G-Y] S. Goto and K. Yamagishi, Finite generation of Noetherian graded rings, in preparation.